AGREGATION de MATHEMATIQUES SESSION DE 1987

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT. — *La deuxième partie est indépendante de la première. On pourra admettre les résultats demandés par l'énoncé pour poursuivre l'étude des questions, à condition de l'indiquer clairement.*

NOTATIONS

Pour toute fonction intégrable $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note :

$$\| g \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} | g(x) | \, dx .$$

On utilisera un pas d'espace Δx ; c'est un nombre réel > 0, destiné à tendre vers 0. On se donne un nombre réel $\rho > 0$, fixe ; le pas de temps sera toujours défini par $\Delta t = \rho \, \Delta x$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = n + 2\mathbb{Z} = \{ j \in \mathbb{Z} ; j - n \text{ est pair} \}$. Pour $j \in I_n$, on définit le pavé de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\Pi_j^n = [n \Delta t, (n+1) \Delta t[\times [(j-1) \Delta x, (j+1) \Delta x[.$$

Si $h(t, x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on pose $h_j^n = h(n \Delta t, j \Delta x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

On rappelle enfin la notation :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p! \, (n-p)!} .$$

PREMIÈRE PARTIE

Soit c un nombre réel, $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que les dérivées premières et secondes de a et f sont bornées.

On cherche une fonction $u(t, x)$, définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, solution du système suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = a(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Q.1. Montrer que le système (P) admet une et une seule solution de classe $\mathcal{C}^2$, qu'on explicitera (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pourra considérer les applications :

$$t \longrightarrow g_y(t) = u(t, y + ct) .$$

On désire approcher numériquement la solution $u(t, x)$ par des fonctions :

$$(t, x) \longrightarrow U^{\Delta x}(t, x) = U(t, x ; \Delta x) .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_n$, la valeur de $U(., . ; \Delta x)$ sera constante sur Π_j^n et notée $u^{n,j}$.

On approchera le système (P) par :

$$(P_{\Delta x}) \quad \begin{cases} \dfrac{u^{n+1,j} - \frac{1}{2}(u^{n,j+1} + u^{n,j-1})}{\Delta t} + c \dfrac{u^{n,j+1} - u^{n,j-1}}{2 \Delta x} \\ \qquad = f_j^n , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I_{n+1} \\ u^{0,j} = a(j \Delta x) \quad \text{pour } j \text{ pair.} \end{cases}$$

Q.2. Montrer que $\{ \Pi_j^n : n \in \mathbb{N}, j \in I_n \}$ est une partition de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Prouver ensuite, par une récurrence soignée, que les relations ci-dessus définissent la fonction $U^{\Delta x}$ de manière unique.

Q.3. On suppose dans cette question que $f \equiv 0$, et que $a(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$, $a(x) > 0$ si $|x| < 1$.

α. Montrer que $u^{n,j} = 0$ pour $|j| \geqslant n + \dfrac{1}{\Delta x}$.

β. Calculer $U(t, 1 + \lambda t ; \Delta x)$ et $U(t, -1 - \lambda t ; \Delta x)$ pour $t > 0$, $\lambda > \dfrac{1}{\rho}$ et $\Delta t \leqslant t \left(1 - \dfrac{1}{\lambda \rho}\right)$.

γ. En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\lim_{\Delta x \to 0} U(t, x ; \Delta x) = a(t, x)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est que $\rho |c| \leqslant 1$.

On supposera jusqu'à la fin de la première partie que $\rho |c| \leqslant 1$.

Q.4. α. Montrer que :

$$\left| u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \right| \leqslant \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left\{ \rho^2 \operatorname*{Sup}_{\Pi_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| + \operatorname*{Sup}_{\Pi_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right\} .$$

β. De même, majorer l'expression :

$$\left| u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - 2 \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \right|$$

à l'aide des dérivées secondes de u.

Q.5. On pose $\varepsilon_j^n = u_j^n - u^{n,j}$, $\varepsilon^n = \operatorname*{Sup}_{j \in I_n} \varepsilon_j^n$, $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \rho c)$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \rho c)$;

α. À l'aide de Q.4, majorer l'expression :

$$| \varepsilon_j^{n+1} - \alpha \varepsilon_{j-1}^n - \beta \varepsilon_{j+1}^n | , \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}, j \in I_{n+1} ;$$

β. Montrer ensuite que :

$$\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \leqslant \operatorname*{Sup}_{j \in I_{n+1}} | \varepsilon_j^{n+1} - \alpha \varepsilon_{j-1}^n - \beta \varepsilon_{j+1}^n | .$$

Tournez la page S. V. P.

γ. En déduire que $\varepsilon^n \leqslant M_1\, n\, (\Delta x)^2$, où M_1 est un nombre réel qui ne dépend que de ρ et des valeurs des dérivées secondes de u dans la bande $(t, x) \in [0, n\,\Delta t] \times \mathbb{R}$. On donnera une majoration explicite de M_1 en fonction de c, ρ, et des dérivées premières et secondes de a et f.

δ. En déduire que pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} U(t, x; \Delta x) = u(x, t).$$

La convergence est-elle uniforme par rapport à t ou à x ?

Q.6. Cas général. Montrer que :

$$u^{n,j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} u^{0,n+j-2k} + \Delta t \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \alpha^k \beta^{l-k} f^{n-l-1}_{j+l-2k}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, z_1 et z_2 sont deux nombres réels distincts de $[0, 1]$, et $\beta_i = 1 - \alpha_i$. Pour $k_0 \in \mathbb{Z}$, on définit $A(k_0)$ comme étant la somme (éventuellement infinie) de la série à termes positifs :

$$\sum_{n,k}{}' \binom{n}{k} \binom{n}{k+k_0} \alpha_1^k \beta_1^{n-k} \alpha_2^{k+k_0} \beta_2^{n-k-k_0},$$

où la notation $\sum'_{n,k}$ signifie que la sommation est étendue aux couples d'entiers (n, k) tels que k, $n-k$, $k+k_0$, $n-k-k_0$ soient $\geqslant 0$; on rappelle que $A(k_0)$ ne dépend pas de l'ordre de la sommation.

Q.7. α. Montrer que pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0)\, z^{k_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (P(z))^n$$

où $P(X)$ est la fraction rationnelle $(\beta_2 - z_2 X)\left(\dfrac{\alpha_1}{X} + \beta_1\right)$.

β. Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0) X^{k_0}$, et calculer sa somme $S(X)$ dans cette couronne. On décomposera S en éléments simples.

γ. En déduire une expression simple des coefficients $A(k_0)$, et la majoration :

$$A(k_0) \leqslant \frac{1}{|z_2 - z_1|}.$$

Maintenant, pour $k_0, r, s \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$A(k_0, r, s) = \sum_{n,k}{}'' \binom{n-r}{k} \binom{n-s}{k+k_0} z_1^k \beta_1^{n-r-k} z_2^{k+k_0} \beta_2^{n-s-k-k_0},$$

où la somme $\sum''_{n,k}$ concerne les couples (n, k) d'entiers relatifs tels que k, $n-r-k$, $k+k_0$ et $n-s-k-k_0$ soient $\geqslant 0$.

Q.8. α. Calculer $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s)\, z^{k_0}$, pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, en fonction de $\dfrac{\alpha_1}{z} + \beta_1$ et $\alpha_2 z - \beta_2$.

β. Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s) X^{k_0}$, et exprimer sa somme dans cette couronne à l'aide de $S(X)$.

γ. En déduire la majoration :

$$A(k_0, r, s) \leqslant \frac{1}{|z_2 - z_1|}$$

(on pourra utiliser Q.7.γ).

TROISIÈME PARTIE

On considère maintenant un système non couplé de deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} = f & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad v(0, x) = v_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + c_2 \dfrac{\partial w}{\partial x} = g & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad w(0, x) = w_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les vitesses de propagation c_1 et c_2 sont supposées distinctes.

On approche chacune des équations de ce système comme dans la première partie par :

$$\frac{1}{2\Delta t}(2v^{n+1,j} - v^{n,j-1} - v^{n,j+1}) + \frac{c_1}{2\Delta x}(v^{n,j+1} - v^{n,j-1}) = f^{n,j},$$

$$\frac{1}{2\Delta t}(2w^{n+1,j} - w^{n,j-1} - w^{n,j+1}) + \frac{c_2}{2\Delta x}(w^{n,j+1} - w^{n,j-1}) = g^{n,j},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_{n+1}$.

ATTENTION. — *Les valeurs $v^{0,j}$, $w^{0,j}$, $f^{n,j}$, $g^{n,j}$ sont données, mais ne sont pas nécessairement égales à $v_0(j\Delta x)$, $w_0(j\Delta x)$, f^n_j ou g^n_j. Leurs choix n'ont pas d'importance dans cette partie.*

On fait les hypothèses suivantes :

(H 1) $\rho\,|c_1| \leqslant 1$ et $\rho\, c_2 \leqslant 1$.

(H 2) $\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| < +\infty$, $\sum_{j \text{ pair}} |w^{0,j}| < +\infty$.

(H 3) $\sum_{j \in I_{n+1}} (|f^{n,j}| + |g^{n,j}|) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q.9. On commence par l'étude du cas :

$$f^{n,j} = 0, \quad g^{n,j} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I_{n+1}.$$

α. À l'aide de Q.6. exprimer le produit $v^{n,j}\, w^{n,j}$ pour $j \in I_n$, en fonction des produits $v^{0,l}\, w^{0,m}$, l et m pairs.

Tournez la page S. V. P.

β. Montrer que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,j}\right| \leqslant \sum_{k_0\in\mathbb{Z}} A(k_0)\sum_{j\text{ pair}}\left|v^{0,j}\,w^{0,j-2k_0}\right|.$$

γ. En déduire que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,j}\right| \leqslant \frac{1}{|\alpha_2-\alpha_1|}\left(\sum_{j\text{ pair}}\left|v^{0,j}\right|\right)\left(\sum_{l\text{ pair}}\left|w^{0,l}\right|\right).$$

Q.10. Deuxième cas $w^{0,j}=0$ pour j pair, $f^{n,j}=0$ pour $n\in\mathbb{N}$, $j\in I_{n+1}$.

α. Exprimer le produit $v^{n,j}\,w^{n,l}$ en fonction des produits $v^{0,i}\,g^{m,p}$ pour l pair et $m-p$ impair.

β. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,l}\right| \leqslant \Delta t\sum_{s=1}^{N}\sum_{k_0\in\mathbb{Z}} A(k_0,0,s)\sum_{j\text{ pair}}\left|v^{0,j}\,g^{s-1,\,j-s-2k_0}\right|.$$

γ. En déduire la majoration :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,j}\right| \leqslant \frac{\Delta t}{|\alpha_2-\alpha_1|}\left(\sum_{j\text{ pair}}\left|v^{0,j}\right|\right)\cdot\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{l\in I_s}\left|g^{s-1,l}\right|\right).$$

Q.11. Troisième cas, $v^{0,j}=w^{0,j}=0$ pour j pair. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,j}\right| \leqslant \frac{\Delta t^2}{|\alpha_2-\alpha_1|}\left(\sum_{r=1}^{N}\sum_{j\in I_r}\left|f^{r-1,j}\right|\right)\cdot\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{l\in I_s}\left|g^{s-1,l}\right|\right).$$

Q.12. De quelle majoration dispose-t-on dans le cas général ?

QUATRIÈME PARTIE

On désire approcher une solution du système couplé de deux équations :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+c_1\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\,w & \text{dans } \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\quad v(0,x)=v_0(x)\text{ sur }\mathbb{R},\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t}+c_2\dfrac{\partial w}{\partial x}=v\,w & \text{dans } \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\quad w(0,x)=w_0(x)\text{ sur }\mathbb{R}.\end{cases}$$

Les nombres réels c_1, c_2 sont donnés, avec $c_1\neq c_2$. Les conditions initiales v_0 et w_0 sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables.

ATTENTION. — *La nature de la solution (v, w) du système ci-dessus et le sens à donner à ces équations n'ont pas d'importance ici. Nous ne considérerons que des solutions approchées.*

On construit donc deux fonctions :

$$V^{\Delta x}(t,x)=V(t,x;\Delta x)\quad\text{et}\quad W^{\Delta x}(t,x)=W(t,x;\Delta x),$$

constantes sur chaque pavé $\prod_j^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $j\in I_n$), et valant respectivement $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$.

On utilise les formules étudiées dans la troisième partie pour calculer les nombres $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$, en choisissant :

$$f^{n,j}=g^{n,j}=\frac{1}{2}\left(v^{n,j+1}\,w^{n,j+1}+v^{n,j-1}\,w^{n,j-1}\right),$$

et

$$v^{0,j}=\frac{1}{2\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} v_0(y)\,dy,\qquad w^{0,j}=\frac{1}{2\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} w_0(y)\,dy.$$

Q.13. Vérifier que les sommes $2\Delta x\sum_{j\text{ pair}}\left|v^{0,j}\right|$ et $2\Delta x\sum_{j\text{ pair}}\left|w^{0,j}\right|$ sont majorées par des nombres indépendants de Δx.

Q.14. On pose $X_N=2\Delta x\,\Delta t\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in I_n}\left|v^{n,j}\,w^{n,j}\right|$.

Montrer que pour $N\geqslant 1$,

$$X_N\leqslant\frac{1}{|c_2-c_1|}\left(\|v_0\|+X_{N-1}\right)\left(\|w_0\|+X_{N-1}\right).$$

On supposera jusqu'à la fin du problème que :

$$\|v_0\|+\|w_0\|<\frac{|c_2-c_1|}{2}.$$

Q.15. α. Montrer l'implication :

$$X_{N-1}\leqslant\frac{1}{4}|c_2-c_1|\quad\Rightarrow X_N\leqslant\frac{1}{4}|c_2-c_1|.$$

β. En déduire l'existence d'un nombre réel $\delta>0$ tel que, si $\Delta x\in]0,\delta[$, alors :

$$X_N\leqslant\frac{1}{4}|c_2-c_1|,\qquad\forall N\in\mathbb{N}.$$

Q.16. On pose $V_N=2\Delta x\sum_{j\in I_N}\left|v^{N,j}\right|$ et $W_N=2\Delta x\sum_{j\in I_N}\left|w^{N,j}\right|$.

Montrer que $\forall N\in\mathbb{N}$,

$$V_N\leqslant\|v_0\|-\frac{1}{4}|c_2-c_1|,\quad W_N\leqslant\|w_0\|+\frac{1}{4}|c_2-c_1|.$$

page 8
1987
AGREGATION de MATHEMATIQUES
option: - analyse numérique

AGREGATION de MATHEMATIQUES
session 1987

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PREMIÈRE PARTIE

On considère un système différentiel de m équations du premier ordre, autonome et mis sous forme normale :

(1) $$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Les fonctions $t \longrightarrow x_i(t)$ sont les m fonctions inconnues de la variable indépendante réelle t; les $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ sont leurs dérivées. Les m fonctions X_i, supposées indépendantes de t (système autonome) sont m fonctions données des m variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$. On les supposera différentiables, de classe C^∞.

La solution $x_i(t)$ de (1), correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$, définit une trajectoire de (1).

1° *a.* Montrer que, pour qu'une fonction différentiable $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ soit intégrale première de (1), c'est-à-dire pour que F garde une valeur constante le long des trajectoires de (1), il faut et il suffit que F satisfasse à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi :

(2) $$\sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

b. L'équation (2) introduit l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'on remarquera que, pour les fonctions $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ne dépendant pas explicitement de t, l'équation (2) se réduit à $\mathcal{X}(F) = 0$.

Montrer que $\mathcal{X}$ est une dérivation sur l'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions des x_i, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$, de classe C^∞, c'est-à-dire que, quelles que soient F et G, éléments de $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathcal{X}(F + G) = \mathcal{X}(F) + \mathcal{X}(G)$$
$$\mathcal{X}(FG) = F\,\mathcal{X}(G) + G\,\mathcal{X}(F).$$

c. De façon plus générale, on considère une fonction différentiable g de p variables réelles $z_1, z_2, \ldots, z_p$, p fonctions F_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, éléments de $\mathcal{A}$ et la fonction composée $g(F_1, F_2, \ldots, F_p)$. Montrer que l'on a :

$$\mathcal{X}(g(F_1, F_2, \ldots, F_p)) = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{X}(F_\alpha) \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}(F_1, F_2, \ldots, F_p).$$

En déduire que toute fonction différentiable de p intégrales premières de (1) est une intégrale première de (1).

2° Un solide K, de masse M, est mobile autour d'un de ses points O maintenu fixe par une liaison sans frottement. K est placé dans le champ de la pesanteur de grandeur constante g.

On rapporte l'espace à un trièdre fixe orthonormé direct $Oxyz$ (Oz verticale ascendante) et l'on considère le trièdre mobile orthonormé direct $Oxyz$ des axes principaux d'inertie de K en O. On suppose que K vérifie les hypothèses de S. Kovalevskaya : les moments principaux d'inertie de K en O sont A, A, $\frac{A}{2}$ et le centre d'inertie G de K se trouve dans le plan Oxy; aussi, on définit l'axe Ox par $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\omega^2 A}{2Mg}\vec{x}$, $\dfrac{\omega^2 A}{2Mg}$ étant la distance de G à O avec ω constante réelle non nulle. On appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée de K par rapport à $Oxyz$ et l'on pose $\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$ et $\vec{z}_1 = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$.

a. Établir le système (Σ) des six équations différentielles du premier ordre aux six inconnues $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$. Le système (Σ) traduit, d'une part, le théorème du moment cinétique appliqué à K en O et, d'autre part, le fait que la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur d'origine O et équipollent à $\vec{z}_1$ est nulle.

b. Appliquer l'opérateur $\mathcal{X}$, attaché au système (Σ), mis sous forme normale, successivement à :

$$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, p^2, q^2, r^2, \omega^2\alpha, \alpha p, \beta q, \gamma r,$$

puis, à l'aide de ces calculs, retrouver le fait que $\vec{z}_1$ est unitaire et les deux intégrales premières classiques de (Σ).

c. Calculer ensuite $\mathcal{X}(p^2 - q^2 - \omega^2\alpha)$, $\mathcal{X}(2pq - \omega^2\beta)$ et en déduire l'intégrale première de (Σ) propre au cas de S. Kovalevskaya.

3° On définit les puissances entières de l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (1) en posant, pour toute fonction F de l'anneau $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{X}^0(F) = F$$
$$\mathcal{X}^k(F) = \mathcal{X}(\mathcal{X}^{k-1}(F)), \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier naturel k, exprimer au moyen de $\mathcal{X}^l(F)$, $\mathcal{X}^l(G)$, $l = 0, 1, \ldots, k$: $\mathcal{X}^k(F + G)$ et $\mathcal{X}^k(FG)$ où F et G sont deux éléments quelconques de $\mathcal{A}$.

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on appelle *série formelle* en t, à coefficients éléments de $\mathcal{A}$, une expression de la forme :

(3) $$S = A_0 + t A_1 + \frac{t^2}{2!} A_2 + \ldots + \frac{t^k}{k!} A_k + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_k$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots$ sont des fonctions éléments de $\mathcal{A}$.

Sauf indication contraire, on ne fait pas d'hypothèse sur la convergence de la somme infinie figurant au second membre de (3).

On définit sur l'espace des séries formelles, l'opération d'addition de deux séries formelles S donnée en (3) et $U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k$, en posant :

$$S + U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A_k + B_k).$$

Tournez la page S. V. P.

De même on définit le produit SU comme étant la série formelle :

$$SU = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{l=0}^{l=k} C_k^l A_l B_{k-l} \right)$$

où les C_k^l sont les coefficients du binôme.

On remarquera que S + U s'obtient en ajoutant terme à terme les séries formelles S et U et que SU s'obtient en développant formellement le produit des séries formelles S et U et en regroupant les termes de même degré en t.

On définit encore la dérivée par rapport à t de la série formelle S comme étant la série formelle :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A_1 + t A_2 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_k + \ldots$$

De plus, si $\mathcal{X}$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}$, on définit la série formelle :

$$\mathcal{X}(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{X}(A_k).$$

On dira que la série formelle S est solution formelle de l'équation de Jacobi (2) et donc intégrale première formelle du système (1), si l'on a formellement :

$$\mathcal{X}(S) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

le membre de droite de cette égalité étant la série formelle nulle, série dont tous les coefficients sont nuls.

1° *a.* On considère alors la série formelle S donnée par (3), où l'on a posé $A_0 = F$, F élément de $\mathcal{A}$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette série formelle soit une solution formelle de (2) est :

$$A_k = (-1)^k \mathcal{X}^k(F), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

b. On est ainsi amené à appeler *série de Lie* de la fonction F, relative à l'opérateur $\mathcal{X}$, la série formelle :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \mathcal{X}^k(F). \tag{4}$$

La formule (4) définit un opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ que l'on notera aussi $\exp(-t\mathcal{X})$ par référence au développement en série de Taylor de la fonction exponentielle. $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ applique l'anneau $\mathcal{A}$ dans l'espace des séries formelles en t.

Montrer que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ est un opérateur linéaire de noyau nul, ayant pour image l'ensemble des séries formelles qui sont solutions formelles de (2).

c. On dira qu'une fonction F est régulière si sa série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F)$ converge pour tout t d'un intervalle ouvert de $\mathcal{R}$ contenant l'origine et si la somme de cette série est une fonction différentiable de l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ dont les dérivées sont sommes des séries de Lie correspondantes supposées elles aussi convergentes.

Montrer que si F est régulière, la somme de la série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F)$ est une intégrale première de (1).

d. Soient φ_i les m fonctions coordonnées :

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i.$$

On suppose ces m fonctions régulières pour le système (1).

On appelle séries fondamentales de Lie du système (1), les m séries de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i)$ et on notera $(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))(x_1, \ldots, x_m, t)$ les sommes de ces séries.

Soit $t \longrightarrow x_i(t)$ la solution de (1) pour les données de Cauchy : $x_i(0) = x_{i_0}$. Montrer que :

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))(x_1(t), \ldots, x_m(t), t) = x_{i_0}$$
$$(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))(x_{1_0}, \ldots, x_{m_0}, -t) = x_i(t).$$

En déduire que les m séries fondamentales de Lie sont indépendantes et permettent, lorsqu'elles sont convergentes, de résoudre effectivement le système (1).

2° On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants de m équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Former les m séries fondamentales de Lie du système (5). En déduire la solution de (5) correspondant aux conditions initiales : $x_i(0) = x_{i_0}$.

3° Soit $Oxyz$ un trièdre orthonormé direct lié à la Terre : O est un point de la surface terrestre, Oz est dirigé suivant la verticale ascendante, Ox vers le Sud (l'axe Ox' directement opposé vers le Nord) et l'axe Oy vers l'Est. Le vecteur rotation de la Terre par rapport à un repère absolu (lié à des étoiles fixes) est le vecteur $\vec{\Omega}$ dont le support est une droite passant par O et située dans le plan méridien xOz; on pose $(Ox', \vec{\Omega}) = \lambda$, λ constante réelle, $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La longueur ω (constante absolue) de $\vec{\Omega}$ est petite devant la longueur g (constante absolue) du vecteur champ de la pesanteur; aussi *on négligera ω^2 dans toute cette question.*

a. En observateurs relatifs (liés à $Oxyz$), écrire le système (Σ') des équations du mouvement d'une particule matérielle P, de masse unité, libre dans l'espace, soumise à son poids et à la seule force d'inertie complémentaire, les variables étant les coordonnées cartésiennes x, y, z de P dans $Oxyz$ et les composantes X, Y, Z de la vitesse de P par rapport à $Oxyz$.

b. Écrire l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (Σ') et retrouver, en appliquant $\mathcal{X}$ à une fonction convenablement choisie, l'intégrale première de l'énergie.

c. Former les six séries fondamentales de Lie du système (Σ'). Ces séries s'arrêtent puisque l'on néglige ω^2. On admettra qu'elles fournissent une solution approchée de (Σ') correspondant aux conditions initiales : $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, $Z(0) = Z_0$, pour des valeurs de t appartenant à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et assez petit. Donner cette solution approchée.

d. Interpréter les résultats obtenus, dans le cas particulier où P est lâchée de O sans vitesse initiale.

e. Retrouver les résultats connus lorsque l'on estime ω négligeable devant g.

TROISIÈME PARTIE

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de $2n$ variables u_i, v_i ; $i = 1, 2, \ldots, n$ dépendant en outre éventuellement d'un paramètre réel τ, fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et de classe C^∞ par rapport à l'ensemble des arguments u_i, v_i, τ.

Dans la suite du problème, les variables u_i, v_i s'appelleront tantôt p_i, q_i, tantôt r_i, s_i, et τ sera parfois le temps t, parfois un petit paramètre ε en théorie des perturbations.

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions quelconques F_1 et F_2 de $\mathcal{E}$ par :

$$[F_1, F_2]_{(u,v)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_i} \frac{\partial F_2}{\partial v_i} - \frac{\partial F_1}{\partial v_i} \frac{\partial F_2}{\partial u_i} \right). \tag{6}$$

Tournez la page S. V. P.

page 10
1987
AGREGATION de MATHEMATIQUES
option: - mécanique générale

1° Montrer rapidement que les crochets de Poisson possèdent un caractère bilinéaire alterné et qu'ils ont de plus les propriétés :

$$[F_1, F_2 F_3]_{(u,v)} = F_2 [F_1, F_3]_{(u,v)} + F_3 [F_1, F_2]_{(u,v)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [F_1, F_2]_{(u,v)} = \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}, F_2\right]_{(u,v)} + \left[F_1, \frac{\partial F_2}{\partial y}\right]_{(u,v)}$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions quelconques de $\mathcal{E}$ et y étant l'un quelconque des $2n - 1$ arguments u_i, v_i, τ.

On admettra d'autre part l'identité de Jacobi :

$$[F_1, [F_2, F_3]]_{(u,v)} + [F_2, [F_3, F_1]]_{(u,v)} + [F_3, [F_1, F_2]]_{(u,v)} = 0,$$

pour trois fonctions quelconques de $\mathcal{E}$.

2° On dit qu'un changement des $2n$ variables p_i, q_i en $2n$ variables r_i, s_i, dépendant éventuellement du temps t, d'équations :

$$(7) \qquad \begin{cases} p_i = f_i (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \\ q_i = g_i (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

définit une transformation canonique si et seulement si l'on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} [f_i, f_j]_{(r,s)} = 0 \\ [f_i, g_j]_{(r,s)} = \delta_{ij} \\ [g_i, g_j]_{(r,s)} = 0 \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \dots, n ;$$

les $2n$ fonctions f_i, g_i sont éléments de $\mathcal{E}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et nul si i est différent de j.

a. On introduit la matrice jacobienne J des $2n$ fonctions f_i, g_i des $2n$ variables r_i, s_i et la matrice carrée $2n \times 2n$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \ I_n \text{ matrice unité } n \times n.$$

Montrer que les conditions (8) peuvent s'écrire sous la forme $J E {}^T J = E$ où ${}^T J$ est la matrice transposée de J.

b. Soit la fonction $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \longrightarrow H (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ élément de $\mathcal{E}$. Par définition, le système différentiel canonique engendré par H est le système différentiel :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = +\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

et l'on dit que H est l'hamiltonien du système (9).

Écrire sous forme matricielle le système (9) à l'aide de la matrice colonne $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les variables p_i, q_i, et de la matrice colonne $\begin{pmatrix} H'_p \\ H'_q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les dérivées partielles de H par rapport aux $2n$ variables p_i, q_i.

c. Montrer que le système (9) se transforme, sous la transformation canonique (7), (8) en un système différentiel canonique engendré par un hamiltonien K, fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, t, que l'on déterminera lorsque le changement de variables (7) ne dépend pas de t, puis lorsqu'il en dépend.

3° *a.* On note A l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (9) de $m = 2n$ équations différentielles du premier ordre. Montrer que $A (F) = [H, F]_{(p,q)}$.

b. Retrouver l'intégrale de l'énergie à l'aide de A.

c. Démontrer le théorème de Poisson : si F et G, éléments de $\mathcal{E}$, fonctions des $2n + 1$ variables p_i, q_i, t sont deux intégrales premières de (9), $[F, G]_{(p,q)}$ est aussi intégrale première de (9).

4° Pour tout entier naturel k, montrer que $\Lambda^k [F, G]_{(u,v)}$ où F et G sont deux éléments quelconques de $\mathcal{E}$, fonctions des $2n + 1$ variables u_i, v_i, τ, s'exprime au moyen des crochets $[\Lambda^l (F), \Lambda^{k-l} (G)]_{(u,v)}$, $l = 0, 1, \dots, k$.

QUATRIÈME PARTIE

1° *a.* On se donne une fonction W, élément de $\mathcal{E}$, fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ et l'on définit l'opérateur Δ_W par :

$$\Delta_W (F) = [W, F]_{(r,s)} + \frac{\partial F}{\partial \tau}$$

où F est une fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ, élément quelconque de $\mathcal{E}$.

On définit les puissances entières Δ_W^k de l'opérateur Δ_W comme on a défini celles de l'opérateur $\mathcal{X}$ en première partie, 3°.

Montrer que, pour tout entier naturel k, les expressions de $\Delta_W^k (F + G)$, $\Delta_W^k (FG)$ et $\Delta_W^k ([F, G]_{(r,s)})$ au moyen de $\Delta_W^l (F)$, $\Delta_W^l (G)$ pour $l = 0, 1, \dots, k$, sont les mêmes que celles de $\Lambda^k (F + G)$, $\Lambda^k (FG)$ et $\Lambda^k ([F, G])$ au moyen des $\Lambda^l (F)$, $\Lambda^l (G)$.

b. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$F_0^{(k)} (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = \left(\Delta_W^k (F (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau))\right)_{\tau = 0}$$

et l'on considère la série formelle en τ :

$$E_W (F) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} F_0^{(k)} ;$$

E_W est appelé *opérateur de Lie* engendré par la fonction W.

Exprimer de façon formelle les séries formelles $E_W (F + G)$, $E_W (FG)$ et $E_W ([F, G]_{(r,s)})$ au moyen des séries formelles $E_W (F)$ et $E_W (G)$.

c. On considère les $2n$ fonctions coordonnées ρ_i, σ_i :

$$\rho_i (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = r_i, \qquad \sigma_i (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = s_i ; \qquad i = 1, \dots, n$$

et le changement de variables d'équations :

$$(10) \qquad \begin{cases} p_i = (E_W (\rho_i)) (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau) \\ q_i = (E_W (\sigma_i)) (r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

Montrer que, si toutes les fonctions coordonnées sont régulières au sens du 1°, *c* de la deuxième partie, le changement de variables d'équations (10) définit une transformation canonique dépendant de τ.

d. Montrer qu'alors les seconds membres de (10) constituent les développements en série de Taylor au voisinage de $\tau = 0$ de la solution du système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau) \longrightarrow W (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau)$, τ étant la variable indépendante, solution correspondant aux conditions initiales : $p_i (0) = r_i$, $q_i (0) = s_i$; $i = 1, \dots, n$.

e. Déduire de ce qui précède que, pour toute fonction F élément de $\mathcal{E}$, des $2n + 1$ variables p_i, q_i, τ, on peut écrire :

$$F (E_W (\rho_1), \dots, E_W (\rho_n), E_W (\sigma_1), \dots, E_W (\sigma_n), \tau) = E_W (F).$$

Tournez la page S. V. P.

2° *Première application de la question (quatrième partie, 1°).*

$\mathcal{E}$ est ici l'ensemble des fonctions de $2n$ variables r_i, s_i, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, de classe C^∞. W est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à n dimensions :

$$W(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (r_i^2 + \omega^2 s_i^2)$$

où ω est une constante réelle strictement positive. τ est le temps t.

a. Définir l'opérateur Δ_W, les fonctions $F_0^{(k)}$ et l'opérateur de Lie E_W pour F élément quelconque de $\mathcal{E}$.

b. Appliquer E_W aux $2n$ fonctions coordonnées p_i, σ_i.

c. En déduire la solution du système canonique engendré par $W(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ correspondant aux conditions initiales : $p_i(0) = p_{i0}$, $q_i(0) = q_{i0}$.

d. Écrire le système différentiel canonique engendré par $W(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ et trouver directement la solution de ce système obtenue au *c.*

3° *Deuxième application de la question (quatrième partie, 1°).*

Les fonctions de $\mathcal{E}$ considérées ici sont des fonctions de $2n + 1$ variables, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Le paramètre τ du 1° de la quatrième partie est maintenant le petit paramètre ε de la théorie des perturbations. Ces fonctions sont de plus supposées développables en séries de puissances entières de ε, à coefficients indépendants de ε et éléments de $\mathcal{E}$. Les sommes de toutes ces séries sont supposées différentiables terme à terme.

a. On considère la fonction W :

$$W(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n)$$

et l'on se propose d'effectuer la transformation canonique d'équations (10) à l'aide de cette fonction W. On remarquera que, ε étant un petit paramètre, cette transformation canonique est voisine de l'identité.

Montrer que le système différentiel canonique (9), engendré par l'hamiltonien H :

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} H_k(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$$

la variable indépendante étant le temps t, se transforme sous la transformation canonique que l'on vient de décrire, en le système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $E_W(H)$.

b. Pour expliciter $E_W(H)$, on pose, pour tout entier naturel k :

$$(\Delta_W^k(H))(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!} H_l^{(k)}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n).$$

● Établir une relation de récurrence entre la fonction $H_l^{(k)}$, les fonctions $H_j^{(k-1)}$, $j = 0, 1, \ldots, l+1$ et les fonctions W_{m+1} $(m = 0, 1, \ldots, l)$.

●● En déduire que l'on obtient les $H_0^{(k)}$ par un schéma analogue à celui de Pascal.

●●● Donner explicitement $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$.

c. On considère en particulier l'hamiltonien H :

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1 + \omega p_2 + \varepsilon (A p_1^2 \sin^4 q_1 - B \sqrt{2 p_1} \sin q_1 \cos q_2)$$
$$= H_0(p_1, p_2) + \varepsilon H_1(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

où A, B et ω sont des constantes réelles non nulles; ω n'est pas un rationnel.

● Donner la solution $p_1^0(t)$, $p_2^0(t)$, $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$ du système différentiel canonique, dit système principal, engendré par H_0, solution correspondant aux conditions initiales :

$$p_1^0(0) = \alpha_1, p_2^0(0) = \alpha_2, q_1^0(0) = \beta_1, q_2^0(0) = \beta_2.$$

●● On se propose de déterminer W de telle sorte que l'hamiltonien $E_W(H)$ ne dépende que de r_1, r_2, ε. Montrer que cela revient à intégrer le système différentiel canonique engendré par H.

●●● À l'ordre zéro en ε, la fonction W n'intervient pas et ce problème est résolu. Écrire $H_0^{(0)}$.

●●●● Montrer qu'au premier ordre en ε, la fonction inconnue est :

(11) $$H_0^{(1)} + \left(\frac{dW_1}{dt}\right)_0$$

où $\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_0$ désigne la dérivée par rapport au temps de W_1 le long des trajectoires du système principal.

Montrer que la fonction inconnue (11) est égale à la somme d'une fonction de la seule variable r_1 et d'une fonction des variables r_1, s_1, s_2.

Trouver à l'aide de ce qui précède une solution particulière, pour le premier ordre en ε, du problème que l'on vient de se poser au point ●●. On donnera explicitement $H_0^{(1)}$ et W_1.

●●●●● Peut-on opérer de façon similaire aux ordres suivants en ε?

● ● ●
●

page 12
1987 AGREGATION de MATHEMATIQUES
options:-mécanique générale

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions.

DÉFINITIONS - NOTATIONS - RAPPELS

1° On note : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{N}}^* = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. L'adjectif « *réel* » (respt *numérique*) se rapportera à un élément de $\mathbb{R}$ (respt $\overline{\mathbb{R}}$). $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (respt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$) est l'ensemble des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}$ (respt $\mathbb{N}^*$). Si $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\underline{x}_n$ le n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$.

2° Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique, on note $\overline{\lim}\, a_n$ (respt $\underline{\lim}\, a_n$) la *limite supérieure* (respt *inférieure*) de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

● Tous les objets définis ci-dessous le seront sur un espace probabilisé $(E, \mathcal{E}, \mu)$ quelconque.

3° α étant une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$ et f une fonction numérique positive (i.e. $f \geqslant 0$) sur E, $\mathcal{E}$-mesurable, $f \cdot \alpha$ désigne la *mesure de densité f par rapport à α* $\left(\forall A \in \mathcal{E}.\ (f \cdot \alpha)(A) = \int_A f \, d\alpha\right)$.

4° v.a. (respt v.a.r., v.a.n.) est l'abréviation de *variable aléatoire*, i.e. application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans un autre espace mesurable (respt v.a. réelle, v.a. numérique). Y étant une v.a., on note μ_Y sa *loi*, i.e. la mesure image de μ par Y.

a. Si U est une v.a.n. μ-intégrable, on note $E_\mu U = \int U \, d\mu$ (ou, s'il n'y a pas ambiguïté, EU).

b. De même, si $\mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{E}$, $E_\mu^{\mathcal{F}} U$ est l'espérance conditionnelle de U relativement à $\mathcal{F}$ pour la probabilité μ. Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, on la notera $E^{\mathcal{F}} U$ et on notera de manière identique un représentant et sa classe μ- p.s..

5° Si $A, B \in \mathcal{E}$, on note $A \subset B$ μ- p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B) = 1$ et $A = B$ μ-p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B) = 1$.

($\mathbf{1}_A$ désigne la *fonction indicatrice* de la partie A.)

— *Les définitions suivantes s'adaptent immédiatement au cas où l'ensemble d'indice est $\mathbb{N}^*$ au lieu de $\mathbb{N}$.*

6° Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r., on note $(U_n \to)$ l'ensemble des éléments e de E tels que la suite réelle $U_n(e)_{n \in \mathbb{N}}$ soit *convergente dans $\mathbb{R}$*.

7° Soient $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante $(\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N})$ de sous-tribus de $\mathcal{E}$ et $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. ;

a. La suite U est dite $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$-adaptée si U_n est $\mathcal{E}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. U est une *sous-martingale* (respt *martingale*) si elle est adaptée, si $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est μ-intégrable et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad E_\mu^{\mathcal{E}_{n-1}}(U_n - U_{n-1}) \geqslant 0 \ (\text{respt} = 0).$$

(Si besoin, on précisera les éléments de référence; exemple : U est une μ-sous-martingale relativement à $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

c. Une *martingale* $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *bornée* dans $L^1(\mu)$ si $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_\mu \|U_n\| < +\infty$.

Dans tout le problème, on utilisera (sans les démontrer), les résultats suivants :

TH1 Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^1(\mu)$, on a : $\mu(U_n \to) = 1$.

TH2 Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale. S'il existe $c > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ |U_n - U_{n-1}| \leqslant c$, alors :

$$(U_n \to) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_\mu^{\mathcal{E}_{n-1}}\left[(U_n - U_{n-1}) + (U_n - U_{n-1})^2\right] < +\infty\right) \quad \mu\text{-p.s.}$$

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de loi respective $N(0, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\sigma_n > 0$, et $N(m, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne sur $\mathbb{R}$ de moyenne m et variance σ^2. Soient θ et $\tilde{\theta}$ deux réels distincts. On définit les deux suites de v.a.r. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les équations :

$$\begin{cases} X_n = \theta X_{n-1} + U_n \\ \tilde{X}_n = \tilde{\theta} \tilde{X}_{n-1} + U_n \\ X_1 = \tilde{X}_1 = U_1 \end{cases} \qquad \forall n \geqslant 2.$$

On posera par la suite : $X_0 = \tilde{X}_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n), \quad \underline{\tilde{X}}_n = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n).$$

1. *a. α.* Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\underline{X}_n$ (respt $\underline{\tilde{X}}_n$) est une mesure de densité *(notée)* $\underline{Q}_n$ (respt $\underline{\tilde{Q}}_n$) par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n de $\mathbb{R}^n$, et que $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$ peuvent être choisies strictement positives sur tout $\mathbb{R}^n$. (On ne demande pas une expression analytique de $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$.) $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$ seront ainsi choisies par la suite.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{X_{n-1}}{\sigma_n}$ et $\underline{V}_n = (V_1, \ldots, V_n)$.

1. *a. β.* À quel type de loi obéit la v.a. $\underline{V}_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$? Quel est le vecteur moyenne de $\underline{V}_n$?

1. *a. γ.* On note Λ la matrice de covariance de $\underline{V}_n$ et C une matrice orthogonale telle que $C \Lambda C^* = D$ soit diagonale (C^* est la transposée de C).

On note R la matrice diagonale $n \times n$ définie par :

$$R_{ii} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{D_{ii}}} & \text{si } D_{ii} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\Phi = RC\underline{V}_n$. Préciser la loi de Φ.

1. *a. δ.* Si $|\ .\ |$ désigne la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$ et $< .\ ,\ . >$ le produit scalaire associé, démontrer que :

$$\|\underline{V}_n\|^2 \geqslant < D\Phi, \Phi >$$

et en déduire que :

$$E\, e^{-\frac{1}{2}\|\underline{V}_n\|^2} \leqslant \prod_{i\,:\,D_{ii} > 0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 D_{ii}}}$$

Tournez la page S. V. P.

1. *a. ε.* Établir alors l'inégalité :

$$E\left[\|\underline{V}_n\|^2\right] \leqslant \frac{1}{\left[E e^{-\|\underline{V}_n\|^2}\right]^2}$$

1. *a. ζ.* Démontrer les équivalences :

$$P\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty\right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty$$

$$P\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty\right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty$$

1. *b.* ● On note encore X (resp^t $\tilde{X}$) l'application : $\omega \rightsquigarrow (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement : $\omega \rightsquigarrow (\tilde{X}_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$) de Ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, π_j est la j-ème projection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$: $\pi_j(x) = x_j$, pour tout élément $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ étant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on définit alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathcal{C}_n$ de parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$:

$$\mathcal{C}_n = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j) \;\middle|\; A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ j = 1, \ldots, n \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n.$$

Pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}^*$, $\mathcal{B}_n$ est alors la tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ engendrée par $\mathcal{C}_n$.

1. *b. α.* Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_\infty$.

1. *b. β.* Démontrer que X (resp^t $\tilde{X}$) est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$.

1. *b. γ.* Si Q_n (resp^t $\tilde{Q}_n$) est la fonction positive définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$: $Q_n(x) = \underline{Q}_n(\underline{x}_n)$ (resp^t $\tilde{Q}_n(x) = \underline{\tilde{Q}}_n(\underline{x}_n)$), où $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que Q_n et $\tilde{Q}_n$ sont $\mathcal{B}_n$- mesurables.

● μ (resp^t $\tilde{\mu}$) est la loi de X (resp^t $\tilde{X}$), c'est-à-dire la probabilité image de P par X (resp^t $\tilde{X}$).

Si α et β sont deux probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$, on définit les trois relations :

$$\alpha \ll \beta \Leftrightarrow \left(A \in \mathcal{B}_\infty \text{ et } \beta(A) = 0 \Rightarrow \alpha(A) = 0\right)$$

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\alpha \ll \beta \text{ et } \beta \ll \alpha)$$

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \left(\exists\, A \in \mathcal{B}_\infty \text{ tel que } \alpha(A) = 1 \text{ et } \beta(A) = 0\right).$$

Le but de ce problème est d'établir un critère explicite déterminant dans quel cas l'une de ces relations est satisfaite entre μ et $\tilde{\mu}$.

— On définit les probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$: $\nu = \frac{1}{2}(\mu + \tilde{\mu})$, $\mu_n = \mu_{|\mathcal{B}_n}$, $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_{|\mathcal{B}_n}$, $\nu_n = \frac{1}{2}(\mu_n + \tilde{\mu}_n)$ où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_{|\mathcal{B}_n}$ (resp^t $\tilde{\mu}_{|\mathcal{B}_n}$) est la restriction de μ (resp^t $\tilde{\mu}$) à $\mathcal{B}_n$.

— On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les v.a. définies sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$ par :

$$Z_n = \frac{\tilde{Q}_n}{Q_n} \qquad Y_n = \frac{2Q_n}{Q_n + \tilde{Q}_n} \qquad \tilde{Y}_n = \frac{2\tilde{Q}_n}{Q_n + \tilde{Q}_n}$$

et $Z_\infty = \overline{\lim}\, Z_n$ $\quad Y_\infty = \overline{\lim}\, Y_n$ $\quad \tilde{Y}_\infty = \overline{\lim}\, \tilde{Y}_n$.

2. *a. α.* Si $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\forall j = 1, \ldots, n$, justifier la formule :

$$\tilde{\mu}_n\left(\bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j)\right) = \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} \underline{\tilde{Q}}_n \, d\lambda_n$$

et exprimer la probabilité $\tilde{\mu}_n$ à l'aide de Z_n et μ_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. *a. β.* Démontrer que $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une μ- martingale $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$- adaptée et bornée dans $L^1(\mu)$. Que dire de la convergence μ-p.s. de la suite Z. (Utiliser TH 1) ? Que vaut $\mu(Z_\infty = +\infty)$?

2. *a. γ.* Exprimer la probabilité μ_n (resp^t $\tilde{\mu}_n$) à l'aide de Y_n (resp^t $\tilde{Y}_n$) et ν_n.

2. *a. δ.* Démontrer que $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp^t $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une ν- martingale $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$- adaptée et en déduire la convergence de la suite Y (resp^t $\tilde{Y}$) ν-p.s. et dans $L^1(\nu)$. Établir alors que : $\tilde{Y}_\infty = Z_\infty \cdot Y_\infty$ ν-p.s.

2. *b. α.* Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{B}_n$: $\mu(A) = \int_A Y_\infty \, d\nu$, puis en déduire que $\mu = Y_\infty \cdot \nu$. Écrire le résultat analogue pour $\tilde{\mu}$ sans le démontrer.

2. *b. β.* Vérifier que, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$:

$$\text{(F 1)} \qquad \tilde{\mu}(A) = \int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} \mathbf{1}_{(Y_\infty \neq 0)} \, d\mu + \int_A \tilde{Y}_\infty \mathbf{1}_{(Y_\infty = 0)} \, d\nu.$$

2. *b. γ.* En déduire la formule D.L. :

$$\text{(D.L.)} \qquad \forall A \in \mathcal{B}_\infty, \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A Z_\infty \, d\mu + \tilde{\mu}\left[A \cap (Z_\infty = +\infty)\right].$$

2. *b. δ.* Démontrer brièvement la formule :

$$\int \varphi \, d\tilde{\mu} = \int \varphi \, Z_\infty \, d\mu + \int \mathbf{1}_{(Z_\infty = +\infty)} \varphi \, d\tilde{\mu}$$

pour toute v.a.n. φ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$ positive ou bornée.

2. *b. ε.* Démontrer à l'aide de (D.L.) les équivalences suivantes :

$$\text{(F 2)} \qquad \tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow E_\mu Z_\infty = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty < +\infty) = 1$$

$$\text{(F 3)} \qquad \tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow E_\mu Z_\infty = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty < +\infty) = 0$$

3. ● *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$ avec $Z_0 = 1$.*

$\mathcal{B}_0$ est la tribu triviale $\{\varnothing, \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}\}$. On se propose d'établir les équivalences suivantes :

$$\text{(F 4)} \qquad \tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}\sqrt{\alpha_n}\right) < +\infty\right] = 1$$

$$\text{(F 5)} \qquad \tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}\sqrt{\alpha_n}\right) = +\infty\right] = 1$$

Tournez la page S. V. P.

3. *a.* α Démontrer que, $\tilde{\mu}$-p.s. :

$$(Z_\infty < +\infty) = (0 < Z_\infty < +\infty) = (Z_n \to)$$

— *Soit u la fonction réelle définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ \text{signe}(x) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

3. *a.* β. Vérifier que $\tilde{\mu}$-p.s. $(Z_\infty < \infty) = \left(\sum_{k=1}^{n} u(\text{Log } a_k) \to \right)$.

3. *b.* α. Démontrer que si ψ est une v.a.r. $\mathfrak{B}_n$-mesurable positive ou bornée définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on a :

$$E_{\tilde{\mu}}^{\mathfrak{B}_{n-1}}(\psi) = E_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mathfrak{B}}_{n-1}}(\psi\, a_n) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s.}$$

3. *b.* β. En déduire $E_{\mu}^{\mathfrak{B}_{n-1}}(a_n)$ $\tilde{\mu}$-p.s.

3. *b.* γ. Soit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} u(\text{Log } a_k)$.

Démontrer que $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une $\tilde{\mu}$-sous-martingale $(\mathfrak{B}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ - adaptée. *(On admettra l'inégalité : xu (Log x) ⩾ x − 1 ∀x > 0.)*

3. *b.* δ. Établir (F 4) et (F 5) en utilisant la propriété TH 2 et la double inégalité *(que l'on ne demande pas de démontrer)* : il existe A, B tels que $0 < A < B < +\infty$ et, $\forall x > 0$:

$$A(1 - \sqrt{x})^2 \leqslant x\,u(\text{Log } x) - x\,u^2(\text{Log } x) + 1 - x \leqslant B(1 - \sqrt{x})^2.$$

4. *a.* α. Calculer explicitement α_n.

4. *a.* β. Utiliser alors 3.b.α. pour donner une expression analytique de $E_{\mu}^{\tilde{\mathfrak{B}}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n})$ $\tilde{\mu}$-p.s..

4. *b.* α. En déduire alors les équivalences :

$$\mu \ll \tilde{\mu} \iff P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_{n-1}^2}{c_n^2} < +\infty \right] = 1$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \iff P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_{n-1}^2}{c_n^2} = +\infty \right] = 1$$

4. *b.* β. Démontrer que l'on a l'alternative : $\mu \sim \tilde{\mu}$ ou $\mu \perp \tilde{\mu}$ *(utiliser 1. a. ζ.)*.

4. *b.* γ. En particulier, si $\tilde{\theta} = 0$, $\tilde{X} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Caractériser alors l'alternative en terme de la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

L'épreuve traite du problème de l'empilement de "paquets" dans des "boites" de capacité donnée c. Ce problème d'optimisation combinatoire est aussi connu sous le nom de *Bin Packing*. Il est en général *NP*-complet mais diverses heuristiques permettent de trouver des solutions approchées satisfaisantes pour de nombreuses applications.

DÉFINITIONS: Dans la suite du problème, N est un entier ≥ 1 (représentant le nombre de paquets), c est un réel strictement positif représentant la capacité d'une boite. Une *entrée* est un couple $(X; c)$:

$$(X; c) = ((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c)$$

où les X_i (représentant la taille des paquets) appartiennent à l'intervalle réel fermé $[0, c]$.

Une application f de l'intervalle entier $[1..N]$ dans un intervalle entier $[1..M]$ sera appelée un *empilement* de l'entrée $(X; c) = ((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c)$ si sont satisfaites les deux conditions suivantes:

E1. La fonction f est surjective.

E2. Soit $\Omega_i = f^{-1}(\{i\})$; $\forall i \in [1..M]$:

$$\sum_{j \in \Omega_i} X_j \leq c.$$

La condition **E1** traduit le fait que toute boîte contient au moins un élément; la condition **E2** exprime que les éléments affectés à une boite n'excèdent pas la capacité de boîte. L'entier M qui représente la cardinalité de l'image de f est appelé le *coût* de f et est noté $\|f\|$.

Etant donné une suite finie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, on définit son *poids* $\pi(X)$ comme:

$$\pi(X) = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Etant donné une entrée $E = (X; c)$, on définit le *coût optimal* associé $\omega(E)$ par:

$$\omega(E) = \min_f \{\|f\|\}$$

où f parcourt l'ensemble des empilements de E.

La notation $\lfloor u \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à u.

Dans tout le problème, on notera $E_N = [0, 1]^N$.

PARTIE I. GÉNÉRALITÉS.

Q1. Soit λ un réel strictement positif. Montrer que pour tout N et tout $X \in [0, c]^N$:

$$\omega((\lambda X_1, \lambda X_2, \ldots, \lambda X_N);\ \lambda c) = \omega((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c).$$

Montrer que pour tout N, et pour tout $X, Y \in [0, c]^N$:

$$\omega((X_1, X_2, \ldots, X_N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_N);\ 2c) \leq \max\{\omega((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c), \omega((Y_1, Y_2, \ldots, Y_N);\ c)\}.$$

Montrer sous la condition $X_i \leq Y_i$ pour tout $i \in [1..N]$ que:

$$\omega((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c) \leq \omega((Y_1, Y_2, \ldots, Y_N);\ c).$$

En supposant que $X_i + Y_i \leq c$, déterminer le signe de la quantité:

$$\omega((X_1+Y_1, X_2+Y_2, \ldots, X_N+Y_N);\ c) - \omega((X_1, X_2, \ldots, X_N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_N);\ c).$$

Q2. Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ avec $X_i \in [0, c]$. Calculer $\omega(X; c)$ lorsque $\pi(X) \leq c$ et montrer que si $\pi(X) > c$:

$$\frac{\pi(X)}{c} \leq \omega(X; c) < 2\frac{\pi(X)}{c}.$$

Déterminer $\omega(X; 100)$ lorsque $X = (15, 30, 45, 50, 60, 75, 90)$.

Q3. Montrer que pour chaque N et c, et pour chaque entier M tel que $1 \leq M \leq N$, il existe une entrée $(X; c) = ((X_1, X_2, \ldots, X_N);\ c)$ telle que:

$$2\frac{\pi(X)}{c} - 1 = \omega(X; c) = M.$$

Q4. Il s'agit de montrer dans cette question qu'il n'est pas toujours avantageux de remplir complètement une boite afin d'obtenir le placement optimal. On prendra ici $c = 1$. Construire pour tout $N \geq 6$ une suite $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ (avec $0 < X_i < 1$) telle que soient verifiées les deux conditions C1, C2 suivantes:

C1. $X_1 + X_2 + X_3 = 1$.

C2. $\omega((X_1, X_2, \ldots, X_N); 1) < 1 + \omega(X_4, X_5, \ldots, X_N)$.

Construire une suite vérifiant de plus la condition:

C3. Pour tout ensemble d'indices $I \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, $I \neq \{1, 2, 3\}$: on a:

$$\sum_{i \in I} X_i \neq 1.$$

PARTIE II. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL.

L'algorithme de placement séquentiel ou *NextFit* est défini par la fonction Pascal suivante:

```
type vecteur = array[1..N] of real;
function NextFit(X : vecteur; c : real) : integer;
var boite : vecteur;
  i, M : integer;
begin
  for i :=1 to N do boite[i] :=0;
  M :=1;
  for i:=1 to N do
    begin
    if boite[M]+X[i] <= c then boite[M] := boite[M]+X[i]
      else begin M := M+1; boite[M] := X[i] end;
    f[i] := M
    end;
  NextFit := M
end;
```

Pour cette procédure, N est une constante entière et f est définie à l'extérieur de la procédure comme:

```
var f : array[1..N] of integer;
```

Q5. Quels sont la valeur de f et le résultat retourné lorsque la fonction NextFit est appliquée à l'exemple de la question Q2?

On posera pour simplifier les notations $\gamma_{NF}(X; c) = NextFit(X, c)$ (c'est-à-dire le résultat de l'appel de $NextFit(X, c)$). Montrer que l'exécution de *NextFit* sur un tableau de nombres X avec $X_i \leq c$, met dans les $\gamma_{NF}(X; c)$ premiers éléments du tableau f une suite d'entiers qui constitue un empilement de X de coût $\gamma_{NF}(X; c)$. Montrer que pour tout N et X:

$$\omega(X; c) \leq \gamma_{NF}(X; c) \leq 2\frac{\pi(X)}{c} + 1.$$

Q6. Montrer que pour tout N suffisamment grand, il existe une suite $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ avec $0 < X_i < 1$ telle que:

$$\frac{\gamma_{NF}(X; 1)}{\omega(X; 1)} > \frac{199}{100}.$$

Q7. On considère pour chaque $N \geq 1$ la suite particulière:

$$H^{<N>} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{N+1}).$$

Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que:

$$\forall N \geq 1 : \quad \gamma_{NF}(H^{<N>}; 1) - \omega(H^{<N>}; 1) < \delta.$$

PARTIE III. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL DÉCROISSANT.

Soit *TriDecroissant* une procédure de type:

```
procedure TriDecroissant(var X : vecteur);
```

qui trie les éléments de la suite X en ordre décroissant, de sorte qu'après exécution de la procédure, on ait:

$$X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \cdots \geq X_N.$$

La procédure *NextFitDecroissant* est définie par:

```
function NextFitDecroissant(X : vecteur; c : real) : integer;
begin
  TriDecroissant(X);
  NextFitDecroissant:=NextFit(X,c)
end;
```

On note $\gamma_{NFD}(X; c)$ le résultat de *NextFitDecroissant* appliqué à l'entrée $(X; c)$. On fixe dans toute cette partie $c = 1$ et l'on se propose d'évaluer la valeur moyenne ou espérance de $\gamma_{NFD}(X; 1)$ lorsque les composantes X_i sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle réel $[0, 1]$.

RAPPELS: Soit g une fonction intégrable de E_N dans l'ensemble des réels. On appelle *espérance* de g et l'on note $\mathbf{E}[g]$ l'intégrale:

$$\mathbf{E}[g] = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(X_1, X_2, \ldots, X_N)\, dX_1 dX_2 \cdots dX_N.$$

Soit $F \subset E_N$. On appelle *probabilité* de F, que l'on note $\mathbf{Pr}[F]$, l'espérance de la fonction g_F définie par:

$$g_F(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_1, X_2, \ldots, X_N) \in F \\ 0 & \text{si } (X_1, X_2, \ldots, X_N) \notin F. \end{cases}$$

Q8. Calculer l'espérance de la fonction $\pi(X) = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Tournez la page S. V. P.

page 16 1987 AGREGATION de MATHEMATIQUES
options:-mathématiques de l'informatique

Q9. Pour k entier, $1 \leq k < N$ et y tel que $0 \leq y \leq 1$, calculer les fonctions $\psi_k(y)$ et $\phi_k(y)$ définies par:

$$\psi_k(y) = \mathbf{Pr}\Big[\{X \in E_N \quad | \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq y\}\Big];$$

$$\phi_k(y) = \mathbf{Pr}\Big[\{X \in E_N \quad | \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq y \quad \text{et} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_k + X_{k+1} > 1\}\Big].$$

Soit $\bar{\alpha}_N$ l'espérance du nombre d'éléments X_i placés dans la première boîte, c'est-à-dire l'espérance de la cardinalité de $\Omega_1 = f^{-1}(\{1\})$, lors de l'application de l'algorithme *NextFit*. Déterminer $\lim \bar{\alpha}_N$ lorsque $N \to \infty$.

Soit, pour l'algorithme *NextFit*, $\bar{\beta}_N$ le remplissage moyen de la première boîte défini comme l'espérance de la quantité:

$$\sum_{j \in \Omega_1} X_j.$$

Calculer $\lim \bar{\beta}_N$ lorsque $N \to \infty$.

Q10. Pour r entier ≥ 2, on définit une partition de l'intervalle réel $[0,1]$ en r intervalles $\mathcal{I}_\ell$ définis comme suit:

- Pour ℓ tel que $1 \leq \ell < r$: $\mathcal{I}_\ell =]\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell}]$.
- L'intervalle $\mathcal{I}_r$ est défini par $\mathcal{I}_r = [0, \frac{1}{r}]$.

Pour une suite $X \in E_N$ et un entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$, on définit la fonction $w_\ell(X)$ égale à la cardinalité de l'ensemble

$$\{i \quad | \quad 1 \leq i \leq N,\ X_i \in \mathcal{I}_\ell\}.$$

On pose:

$$V_r(X) = \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{w_\ell(X)}{\ell}; \quad W_r(X) = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{w_\ell(X)}{\ell}.$$

Montrer que $\gamma_{NFD}(X;1)$ vérifie l'encadrement:

$$V_r(X) - r \leq \gamma_{NFD}(X;1) \leq W_r(X) + r.$$

Q11. Soit $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ un vecteur à coordonnées entières. Montrer que la probabilité $p_{\vec{n}}$ définie par:

$$p_{\vec{n}} = \mathbf{Pr}\Big[\{X \in E_N \quad | \quad w_1(X) = n_1,\ w_2(X) = n_2,\ \ldots,\ w_r(X) = n_r\}\Big]$$

vaut lorsque $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = N$, et $n_i \geq 0$:

$$p_{\vec{n}} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} \iota_1^{n_1} \iota_2^{n_2} \cdots \iota_r^{n_r}$$

où ι_ℓ représente la longueur de l'intervalle $\mathcal{I}_\ell$.

Q12. Calculer le polynôme Q en les indéterminées $t_1, t_2, \ldots, t_r$ défini par:

$$Q(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \sum_{\vec{n}} p_{\vec{n}}\, t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_r^{n_r},$$

où la sommation est étendue à tous les vecteurs $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ entiers tels que $n_i \geq 0$ et $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = N$. En déduire l'espérance des fonctions $V_r(X)$ et $W_r(X)$.

Q13. On définit $\bar{\gamma}_{NFD}(N)$ comme l'espérance de $\gamma_{NFD}(X;1)$ pour $X \in E_N$. En choisissant convenablement r en fonction de N, montrer l'existence de la limite:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\gamma}_{NFD}(N)}{N}$$

et évaluer cette limite. On rappelle que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PARTIE IV. COUT DU PLACEMENT OPTIMAL.

L'objet de cette partie est de déterminer l'espérance du coût optimal lorsque $N \to \infty$. On prendra ici $c = 1$.

Soit $r = 2s + 1$ un entier impair, avec $r \geq 3$. On définit une partition de l'intervalle $[0,1]$ en r intervalles $\mathcal{J}_\ell$ de la manière suivante:

- Pour ℓ tel que $1 \leq \ell < r$, $\mathcal{J}_\ell = [\frac{\ell-1}{r}, \frac{\ell}{r}[$.
- L'intervalle $\mathcal{J}_r$ est défini par: $\mathcal{J}_r = [\frac{r-1}{r}, 1]$.

On définit pour chaque ℓ et $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ l'ensemble:

$$\zeta_\ell(X) = \{i \quad | \quad 1 \leq i \leq N,\ X_i \in \mathcal{J}_\ell\}.$$

On note $Z_\ell(X)$ la cardinalité de l'ensemble $\zeta_\ell(X)$.

On considère une méthode de placement dite ***méthode des placements complémentaires*** et spécifiée comme suit:

A. Chaque élément de $\zeta_r(X)$ est placé dans une boîte séparée.

B. Pour j de 1 à s faire:

- Soit $\lambda_j = \min(Z_j(X), Z_{r-j}(X))$.
- Choisir deux sous-ensembles $\zeta'_j(X) \subseteq \zeta_j(X)$ et $\zeta'_{r-j}(X) \subseteq \zeta_{r-j}(X)$ de cardinalité λ_j. Chaque élément de $\zeta'_j(X)$ est apparié à un élément de ζ'_{r-j} et la paire est placée dans une boîte séparée.
- Les éléments restants de $\zeta_j(X) \backslash \zeta'_j(X) \cup \zeta_{r-j}(X) \backslash \zeta'_{r-j}(X)$ sont affectés chacun à une boîte différente.

Q14. Soit $\gamma_{PC}(X;1)$ le coût de l'empilement produit par un algorithme obéissant au schéma de placement complémentaire. Déterminer $\gamma_{PC}(X;1)$ lorsque $r = 5$ et

$$X = (\tfrac{15}{100}, \tfrac{30}{100}, \tfrac{45}{100}, \tfrac{50}{100}, \tfrac{60}{100}, \tfrac{75}{100}, \tfrac{90}{100}).$$

Etablir la majoration:

$$\gamma_{PC}(X;1) \leq \frac{N}{2} + \frac{r-1}{2}\Delta_r(X) + \frac{N}{2r},$$

où la fonction $\Delta_r(X)$, appelée écart de distribution, est définie comme:

$$\Delta_r(X) = \max_{1 \leq \ell \leq r} \{\frac{N}{r} - Z_\ell(X)\}.$$

Q15. Pour $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ un vecteur à coordonnées entières, déterminer les probabilités:

$$p'_{\vec{n}} = \mathbf{Pr}\Big[\{X \in E_N \quad | \quad Z_1(X) = n_1,\ Z_2(X) = n_2,\ \ldots,\ Z_r(X) = n_r\}\Big].$$

On définit pour tout b entier ≥ 0, la fonction:

$$e_b(z) = \sum_{j=0}^{b} \frac{z^j}{j!},$$

Tournez la page S. V. P.

et l'on pose pour b entier avec $0 \leq b < \frac{N}{r}$:

$$q_{N,b} = \mathbf{Pr}\big[\{X \in E_N \quad | \quad \forall \ell : \ Z_\ell(X) > b\}\big].$$

Exprimer $q_{N,b}$ en fonction du coefficient de z^N dans le développement de Taylor de:

$$\big(e^z - e_b(z)\big)^r.$$

Q16. Soit Γ_ρ le cercle de rayon ρ centré à l'origine orienté positivement. Montrer que:

$$1 - q_{N,b} = \frac{N!}{2i\pi r^N} \int_{\Gamma_\rho} \big[e^{rz} - (e^z - e_b(z))^r\big] \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

En prenant, $\rho = \frac{N}{r}$, établir la majoration:

$$1 - q_{N,b} \leq \frac{N! e^N}{N^N} \Big[1 - \big(1 - e^{-N/r} e_b(\tfrac{N}{r})\big)^r\Big].$$

Q17. Montrer que pour u réel avec $u > b \geq 0$, on a:

$$e_b(u) \leq (b+1)\frac{u^b}{b!} \qquad \text{et} \qquad e_b(u) < e^u.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $K > 0$ telles que, lorsque $r = 2\lfloor \frac{N^{1/3}}{2} \rfloor + 1$ et $b = \lfloor N^{2/3} \rfloor - \lfloor N^{1/2} \rfloor$:

$$1 - q_{N,b} < K e^{-CN^{1/3}}.$$

On rappelle qu'on a par la formule de Stirling:

$$N! \sim N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \qquad \text{lorsque } N \to \infty.$$

Q18. On définit $\bar{\omega}(N)$ comme égal à l'espérance de $\omega(X;1)$ pour $X \in E_N$. Montrer l'existence de la limite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\omega}(N)}{N},$$

et déterminer cette limite. Soit de même $\bar{\pi}(N)$ l'espérance de $\pi(X)$; évaluer

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\omega}(N)}{\bar{\pi}(N)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\gamma}_{NFD}(N)}{\bar{\omega}(N)}.$$

PARTIE V. *NP*–COMPLÉTUDE DU PROBLÈME GÉNÉRAL.

Dans cette partie, on part d'un problème classique dit de *recouvrement exact* ou *REC*. Une entrée de *REC* consiste en un couple $(t, \{S_j\}_{1 \leq j \leq J})$ où t est entier positif et $\{S_j\}_{1 \leq j \leq J}$ est une famille d'ensembles telle que chaque $S_j \subseteq [1..t]$. Le problème *REC* consiste à reconnaitre s'il existe une sous famille $\{T_h\}_{1 \leq h \leq H}$ de la famille des $\{S_j\}$, $T_h = S_{j_h}$ avec $1 \leq j_1 < \ldots < j_H \leq J$, telle que:

R1. Les T_h sont deux à deux disjoints.

R2. L'union des T_h est égale à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, t\}$.

On suppose dans la suite du problème que les entiers sont représentés de manière usuelle en binaire et que les ensembles et les suites sont donnés par la liste de leurs éléments. On admettra qu'avec ces conventions de représentation, le problème *REC* est *NP*–complet.

On rappelle que les opérations arithmétiques élémentaires sur les entiers ($+, -, \times$ et comparaisons) ont des coûts polynômiaux en la taille de leurs arguments. De même, pour les opérations élémentaires sur les listes (recherche d'un élément, concaténation) dont le coût est polynômial en la longueur *totale* des arguments.

Q19. Le problème de *Sac-à-Dos* (*KNAPSACK*) consiste, étant donné une suite d'entiers $\{a_i\}_{1 \leq i \leq t}$ et un entier b, à déterminer s'il existe un sous-ensemble des $\{a_i\}$ dont la somme soit exactement égale à b.

Construire une réduction calculable en temps polynomial (en fonction de la longueur de l'argument) du problème *REC* au problème *KNAPSACK*. Pour cela, on pourra prendre d supérieur au nombre J d'ensembles S_j de l'entrée de *REC*, et "coder" les ensembles S_j par des entiers en base d formés des chiffres 0 et 1.

Q20. Le problème dit de *partition* (*PART*) consiste, étant donné une suite $\{b_i\}_{1 \leq i \leq s}$ de nombres entiers à déterminer s'il existe un sous-ensemble $I \subset [1..s]$ tel que:

$$\sum_{h \in I} b_h = \sum_{h \notin I} b_h.$$

Construire une réduction polynomiale de *KNAPSACK* à *PART*.

Q21. On considère le problème d'empilement de paquets dans lequel les paquets sont à valeur entière et la capacité de boite est un entier ≥ 1. Montrer que le problème de déterminer si une entrée $(X; c)$ est telle que:

$$\omega(X; c) = 2$$

est *NP*–complet.

Q22. Quelles conclusions algorithmiques générales sur l'empilement de paquets peut-on tirer de l'ensemble du problème lorsque la capacité de boite c est égale à 1?